Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 83

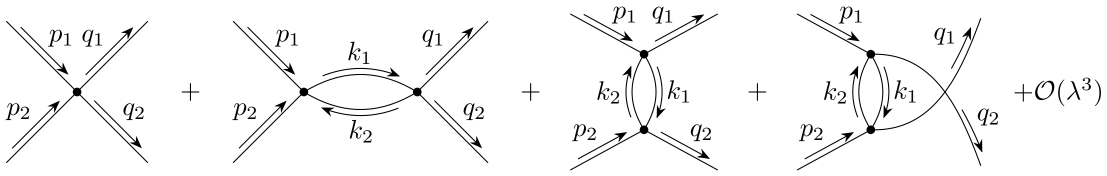
Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

24 de agosto de 2022

1. Calcular $\mathcal{M}_{2\to 2}$ a orden $\mathcal{O}\left(\lambda^3\right)$.

Siguiendo las reglas de Feynman, la número 5 dice que se deben calcular todos los diagramas conectados y amputados, a orden $\mathcal{O}\left(\lambda^3\right)$ esos son 4:



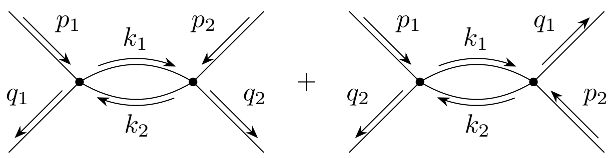
Los dos primeros diagramas los hizo Javier, sus respectivos valores son;

$$\mathcal{M}_1 = -\lambda$$

y

$$\mathcal{M}_2 = \frac{i\lambda^2}{2}\int \frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} = -\frac{i\lambda^2}{2}I(p_1+p_2)$$

Para hacer los diagramas 3 y 4, basta con observar lo siguiente: El valor de un diagrama depende solamente de la forma en que los vértices y los propagadores estén conectados, la forma en que se dibuja el diagrama es completamente irrelevante. Con eso en mente se pueden dibujar los diagramas 3 y 4 de la siguiente forma:



En efecto, un vistazo rápido muestra que estos dos diagramas tienes los mismos vértices y los mismos propagadores (conectados exactamente igual) que los antiguos diagramas 3 y 4. Pero ahora estos dos diagramas son idénticos al diagrama número 2 que Javier ya ha resuelto, la única diferencia entre los diagramas 2 y 3 es que lo que en uno es p_2, en el otro es q_1 y que apuntan en sentidos opuestos, es decir que la única diferencia es el cambio $p_2 \leftrightarrow -q_1$:

$$\mathcal{M}_3 = \frac{i\lambda^2}{2}\int \frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{(p_1-q_1-k)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} = -\frac{i\lambda^2}{2}I(p_1-q_1)$$

Y la única diferencia entre el diagrama 2 y 4 es el intercambio $p_2 \leftrightarrow -q_2$

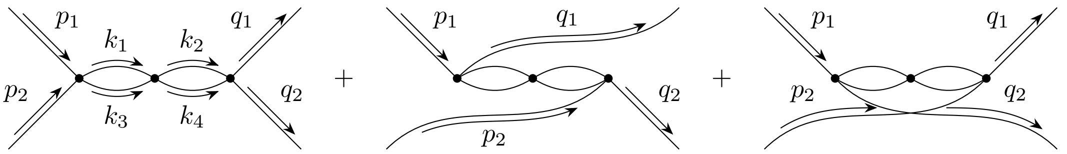
$$\mathcal{M}_3 = \frac{i\lambda^2}{2}\int \frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{(p_1-q_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} = -\frac{i\lambda^2}{2}I(p_1-q_2)$$

La amplitud de scattering total será por lo tanto;

$$\mathcal{M}_{2\to 2} = -\lambda - \frac{i\lambda^2}{2}\left[I(p_1+p_2)+I(p_1-q_1)+I(p_1-q_2)\right]+\mathcal{O}\left(\lambda^3\right)$$

2. Bonus: Calcular $\mathcal{M}_{2\to 2}$ a orden $\mathcal{O}\left(\lambda^4\right)$

Para calcular los diagramas de orden 3, se pueden agrupar los diagramas en dos grupos, el primer grupo contiene los siguientes diagramas:



Siguiendo las reglas de Feynman para el primer diagrama, por cada propagador interno se debe multiplicar por el propagador de Feynman e integrar;

$$\int \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_4^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_4}{(2\pi)^4}$$

Luego, por cada vértice, se multiplica por $(-i\lambda)(2\pi)^4\delta$;

$$\begin{aligned}(-i\lambda)^3 \int \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_4^2 - m^2 + i\varepsilon} (2\pi)^{12} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_3) \times \\ \delta^{(4)}(k_1 + k_3 - k_2 - k_4) \delta^{(4)}(k_2 + k_4 - q_1 - q_2) \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_4}{(2\pi)^4}\end{aligned} \tag{1}$$

Finalmente, se divide por el factor de simetría (en este caso, 4). Haciendo las integrales respecto de k_3 y k_4 y simplificando un poco;

$$\begin{aligned}\frac{i\lambda^3}{4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \int \frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \times \\ \int \frac{1}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{(2\pi)^4}\end{aligned} \tag{2}$$

Por lo que la amplitud asociada a este diagrama es

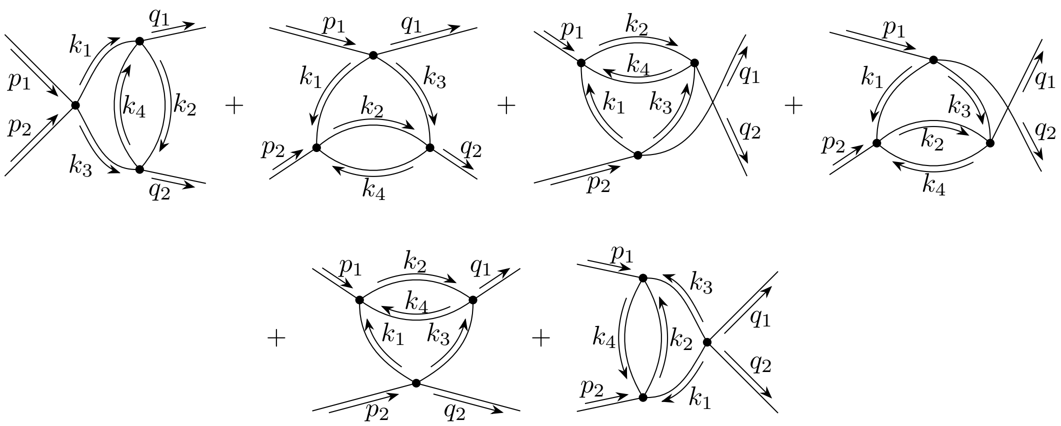
$$\mathcal{M}_{11} = \frac{\lambda^3}{4} \left(\int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \right)^2 = \frac{\lambda^3}{4} I^2(p_1 + p_2)$$

Usando el mismo razonamiento que en el apartado anterior;

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{\lambda^3}{4} \left(\int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 - q_1 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \right)^2 = \frac{\lambda^3}{4} I^2(p_1 - q_1)$$

$$\mathcal{M}_{13} = \frac{\lambda^3}{4} \left(\int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 - q_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \right)^2 = \frac{\lambda^3}{4} I^2(p_1 - q_2)$$

El segundo grupo de diagramas lo forman los restantes



De nuevo, las reglas de Feynman para el primer diagrama dan, por cada propagador interno,

$$\int \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_4^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_4}{(2\pi)^4}$$

por cada vértice,

$$\begin{aligned}(-i\lambda)^3 \int & \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_4^2 - m^2 + i\varepsilon} (2\pi)^{12} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_3) \times \\ & \delta^{(4)}(k_1 + k_4 - q_1 - k_2) \delta^{(4)}(k_2 + k_3 - q_2 - k_4) \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_4}{(2\pi)^4} \end{aligned} \tag{3}$$

Y al dividir por el factor de simetría (en este caso, 2), y hacer las integrales respecto de k_3 y k_4;

$$\begin{aligned}\frac{i\lambda^3}{2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \int & \frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \times \\ & \frac{1}{(q_1 + k_2 - k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{(2\pi)^4} \end{aligned} \tag{4}$$

Finalmente, la amplitud de scattering será

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{21} &= \frac{\lambda^3}{2} \int \frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(q_1 + k_2 - k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{(2\pi)^4} \\ &= \frac{\lambda^3}{2} \int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} I(k - q_1) \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\end{aligned}$$

Los otros 5 diagramas son idénticos con los siguientes cambios: El segundo es idéntico al primero con el intercambio $p_2 \leftrightarrow -q_1$. El tercero con $p_1 \leftrightarrow -q_1$, el cuarto $p_2 \to -q_2 \to -q_1 \to p_2$, el quinto $p_1 \to -q_2 \to -q_1 \to p_1$ y el sexto $p_1 \leftrightarrow -q_2, p_2 \leftrightarrow -q_1$. Por lo que las amplitudes que faltan son

$$\mathcal{M}_{22} = \frac{\lambda^3}{2} \int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 - q_1 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} I(k + p_2) \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}$$

$$\mathcal{M}_{23} = \frac{\lambda^3}{2} \int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_2 - q_1 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} I(k + p_1) \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}$$

$$\mathcal{M}_{24} = \frac{\lambda^3}{2} \int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 - q_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} I(k + p_2) \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}$$

$$\mathcal{M}_{25} = \frac{\lambda^3}{2} \int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_2 - q_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} I(k + p_1) \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}$$

$$\mathcal{M}_{26} = \frac{\lambda^3}{2} \int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(q_2 + q_1 + k)^2 - m^2 + i\varepsilon} I(k + p_2) \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}$$

La amplitud total será, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{2\to 2} = & -\lambda - \frac{i\lambda^2}{2} \left[I(p_1 + p_2) + I(p_1 - q_1) + I(p_1 - q_2) \right] + \mathcal{M}_{11} + \mathcal{M}_{12} + \mathcal{M}_{13} \\ & + \mathcal{M}_{21} + \mathcal{M}_{22} + \mathcal{M}_{23} + \mathcal{M}_{24} + \mathcal{M}_{25} + \mathcal{M}_{26} + \mathcal{O}\left(\lambda^4\right)\end{aligned}$$